2º Ano – Ensino Médio

Neste material você encontrará alguns exemplos sobre matrizes, e na sequência, exercícios para que você possa desenvolver a seguinte habilidade.

Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano.

Multiplicação de um número real por uma matriz

Observe o seguinte exemplo:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Basta você multiplicar o número real, por cada elemento correspondente na matriz.

Multiplicação de matrizes

Dadas duas matrizes A e B, o produto AB só poderá ser obtido se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. A matriz resultante terá como ordem o número de linhas de A e o número de colunas de B.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = AB_{m\times p}$$

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$, na qual cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos de cada elemento da linha *i* de A pelo correspondente elemento da coluna *j* de B.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 7 + 4\cdot 0 & 3\cdot 2 + 4\cdot(-3) \\ 6\cdot 7 + (-5)\cdot 0 & 6\cdot 2 + (-5)\cdot 3 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação

Considerando as matrizes A, B e C, valem:

- (A · B) · C = A · (B · C) (associativa)
- (A + B) · C = A · C + B · C (distributiva)

Exemplo:

Dadas as matrizes T e P, calcule o produto dessas matrizes:

$$T = \begin{pmatrix} 28 & 8 & 7 \\ 19 & 5 & 14 \\ 17 & 10 & 11 \\ 16 & 13 & 9 \\ 18 & 6 & 14 \end{pmatrix}_{5\times 3} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Observe que a matriz T tem três colunas, e a matriz P três linhas. Só é possível efetuar o produto das duas matrizes, caso isso acorra, o número de colunas da matriz A ser o mesmo número de linhas da matriz B.

A multiplicação das matrizes *T* e *P* resulta na matriz *G.*

$$G = T \cdot P = \begin{pmatrix} 28 & 8 & 7 \\ 19 & 5 & 14 \\ 17 & 10 & 11 \\ 16 & 13 & 9 \\ 18 & 6 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 62 \\ 61 \\ 61 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Notar que os elementos de uma linha de T são multiplicados, ordenadamente, pelos correspondentes elementos da coluna de P e, depois, os produtos são somados:

- $g_{11} = t_{11} \cdot p_{11} + t_{12} \cdot p_{21} + t_{13} \cdot p_{31} = 28 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 77$
- $g_{21} = t_{21} \cdot p_{11} + t_{22} \cdot p_{21} + t_{23} \cdot p_{31} = 19 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 0 = 62$
- $g_{31} = t_{31} \cdot p_{11} + t_{32} \cdot p_{21} + t_{33} \cdot p_{31} = 17 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 11 \cdot 0 = 61$
- $g_{41} = t_{41} \cdot p_{11} + t_{42} \cdot p_{21} + t_{43} \cdot p_{31} = 16 \cdot 3 + 13 \cdot 1 + 9 \cdot 0 = 61$
- $g_{51} = t_{51} \cdot p_{11} + t_{52} \cdot p_{21} + t_{53} \cdot p_{31} = 18 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 14 \cdot 0 = 60$

IMPORTANTE

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$, na qual cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos de cada elemento da linha **i** de A pelo correspondente elemento da coluna **j** de B.

IGUALDADE DE MATRIZES

Para que duas ou mais matrizes sejam consideradas iguais elas devem obedecer a algumas regras:

- Devem ter a mesma ordem, ou seja, o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.
- Os elementos devem ser iguais aos seus correspondentes.
- Portanto, podemos concluir que: A matriz A_{2x2} é igual a matriz B se, somente se, a matriz B tiver também a ordem 2x2 e os elementos $a_{11} = b_{11}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{12} = b_{12}$ e $a_{22} = b_{22}$.

Veja um exemplo de matrizes:
As matrizes A e B são iguais, pois preenchem todos os requisitos de igualdade de matrizes.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -50 & 11 \\ 63 & -7 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}_{3x2} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -50 & 11 \\ 63 & -7 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}_{3x2}$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule A x B, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule:

a) 2 x A = b) 3 x D + E = c) 2 x D – 3 x E =

3. Determine os números reais x e y em cada caso:

a) $\begin{bmatrix} x+y & 3 \\ 1 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 8 & 3x-2y \\ x+3y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4. (UFRGS) A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usadas num restaurante:

$$C = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \textit{arroz} \\ \textit{carne} \\ \textit{salada} \end{array} \end{array}$$

A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P1, P2, P3 desse restaurante:

$$P = \begin{array}{ccc|l} 2 & 1 & 1 & pratoP1 \\ 1 & 2 & 1 & pratoP2 \\ 2 & 2 & 0 & pratoP3 \\ \hline \textit{arroz} & \textit{carne} & \textit{salada} & \end{array}$$

Determine a matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P1, P2, P3.

5. Três amigos saíram juntos para comer no sábado e no domingo. As tabelas a seguir resumem quantas garrafas de refrigerante cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

S refere-se às despesas de sábado e D às despesas de domingo. Cada elemento aij das matrizes nos dá o número de refrigerantes que i pagou a j , sendo Paulo o número 1, Sandra o número 2 e Edna o número 3. No sábado, por exemplo, Paulo pagou 1 refrigerante que ele próprio bebeu, 2 de Sandra e 3 de Edna (primeira linha da matriz S). Quem bebeu mais refrigerantes no fim de semana?
*Obs.: Paulo – 1ª linha; Sandra – 2ª linha e Edna – 3ª linha.

6. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine:

a) A x C

b) A x B

c) B x C

d) A x (B + C)

e) A x B + C

Olá querido aluno! Para finalizar, vamos relaxar um pouco, realizando um famoso jogo de raciocínio lógico, o SUDOKU.

Sudoku, por vezes escrito ***Su Doku*** (数独 '**sūdoku**') é um jogo baseado na colocação lógica de números. O objetivo do jogo é a colocação de números de 1 a 9 em cada uma das células vazias numa grade de 9x9, constituída por 3x3 subgrades chamadas regiões. O quebra-cabeça contém algumas pistas iniciais, que são números inseridos em algumas células, de maneira a permitir uma indução ou dedução dos números em células que estejam vazias. Cada coluna, linha e região só pode ter um número de cada um do 1 a 9. Resolver o problema requer apenas raciocínio lógico e algum tempo. Os problemas são normalmente classificados em relação à sua realização. O aspecto do *sudoku* lembra outros quebra-cabeças de jornal. Ao contrário do que se possa pensar, o Sudoku pode-se cometer. Portanto a frase "cometer o Sudoku" está correta. Foi criado por Howard Garns, um projetista e arquiteto de 74 anos aposentado. A região 3x3 no canto superior direito. O solucionador pode eliminar todas as células vazias no canto superior direito que contenham um 5 nas mesmas colunas ou linhas. Isto deixa apenas uma célula possível (destacada em verde).

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

<u>SUDOKU COMPLETO</u>

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Neste caso os números em vermelho, são os números que deveriam ser preenchidos pelo jogador, os números em preto, são os norteadores do jogo, observe que, cada linha e coluna, foram compostas pelos números de 1 a 9. Assim o jogo fica completo!
Agora é com você!
Complete o jogo abaixo, siga as instruções e fiquem atentos as linhas e colunas que irá completar.

Sudoku Nível Fácil.

2				9		4		1
	5			6		2	9	
6	9	1			2	7		
		5	1		9			
7	2						1	9
			2		6	5		
		3	9			1	7	5
	1	2		8			4	
9		7		1				2

Bom jogo!